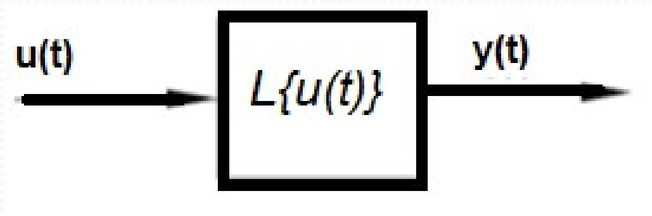
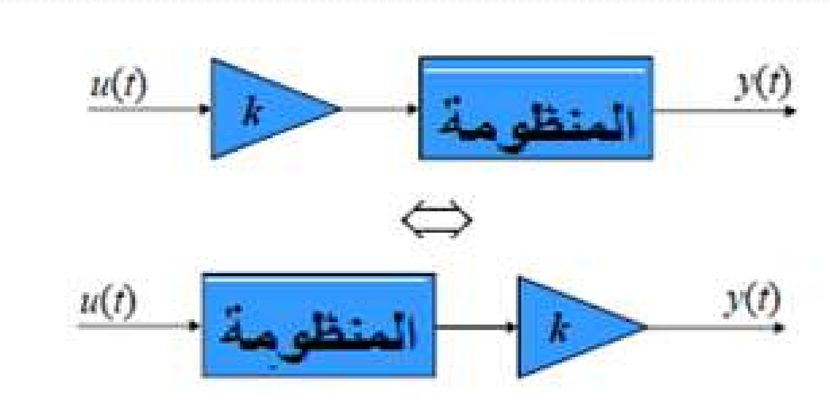
مفهوم الخطية linearity

المنظومات الخطية هي تلك التي تخضع لمبدأي التجانس homoginity و التحصيل الشامل



super position principle

المنظومات الخطية هي تلك المنظومات التي توصف بمعادلات خطية



I. مبدأ التجانس

هناك تناسب بين الدخل والخرج

أي تغيير في إشارة الدخل يقابلها نفس التغير في إشارة الخرج

رياضياً: إذا كانت المنظومة توصف العلاقة

$$y = f(u)$$

وكانت المنظومة تحقق العلاقة:

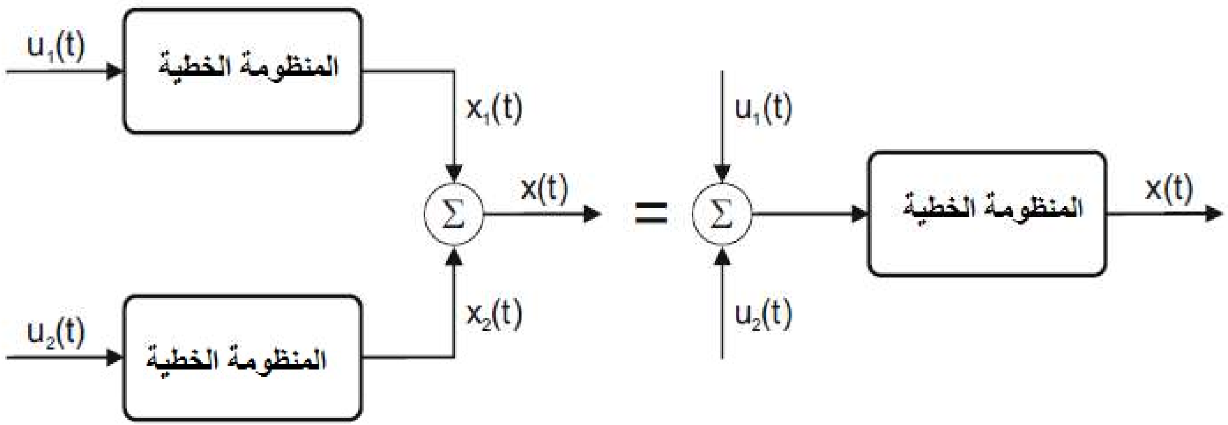
$$k \cdot y = f(ku) = k \cdot f(u)$$

كان مبدأ التجانس محققاً

مفهوم الخطية linearity

II. مبدأ التحصيل الشامل

بيانياً:



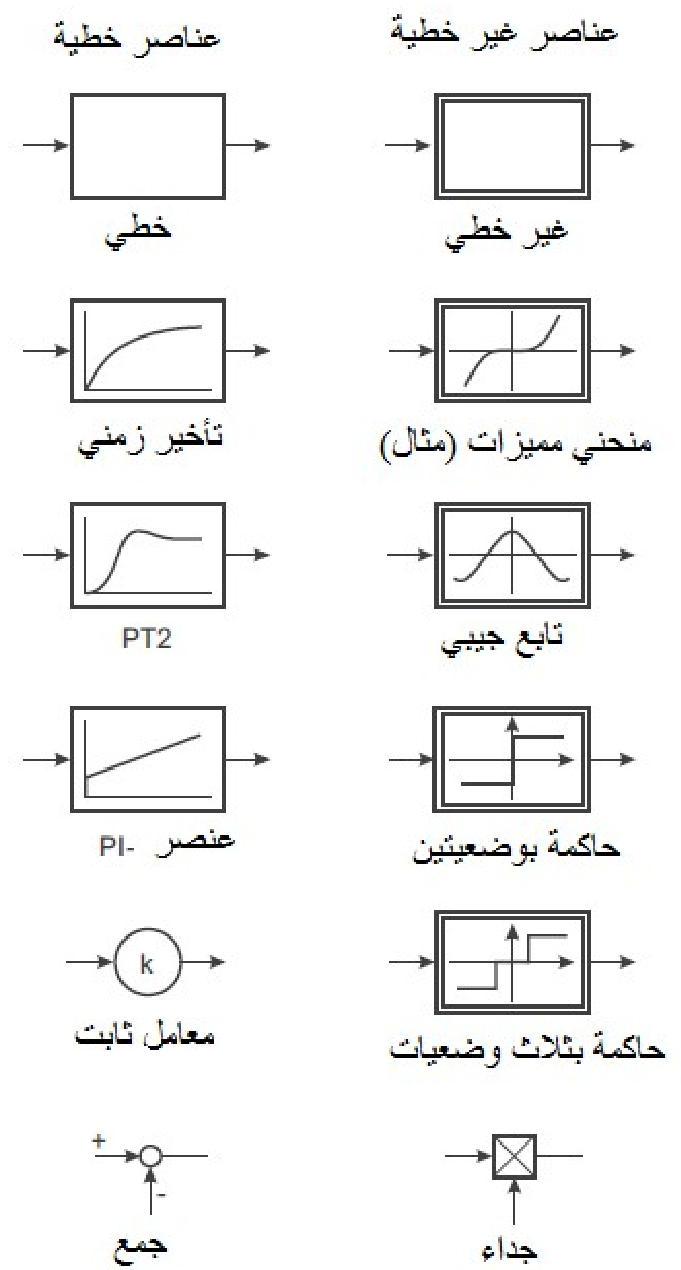
رياضياً: إذا جمعنا إشارتي دخل يجب أن يكون
خرج المنظومة ناتج جمع الخرج لكليهما
كما لو أثرنا بكل إشارة على حدة

$$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$$

يمكن التعبير عن كلا المبدأين بالعلاقة:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot y_i(t) = f\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot u_i(t)\right)$$

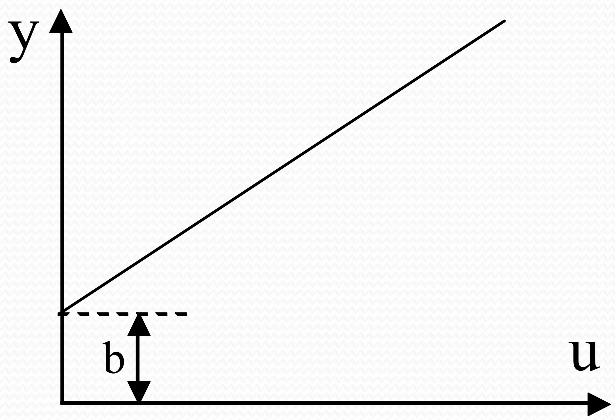
مفهوم الخطية linearity



في المخططات الصندوقية يرمز للعناصر الخطية بمستطيل ذي إطار أحادي، فيما يشار إلى العناصر غير الخطية بمستطيلات ذات إطار مزدوج.

أمثلة توضيحية

لتكن المنظومة المعبر عنها بالمعادلة: $y = u + b$



المنظومة لا تحقق شرط التجانس

$$y = f(u) = u + b$$
$$f(ku) = ku + b$$
$$kf(u) = k(u + b) = ku + kb \neq f(ku)$$

تصبح المنظومة خطية إذا حركنا المحور u بمقدار b إلى الأعلى

يكفي عدم تحقق أحد الشرطين لإثبات أن المنظومة غير خطية

التحقق من خطية منظومة تجريبياً

مثال: خلال قياسات استطالة نابض بتطبيق قوى مختلفة عليه كانت النتائج كالتالي:

F [N] القوة	x [mm] الاستطالة
2	10
3	15
5	25

1- شرط التجانس: $f(kF) = k \cdot f(F)$

$$\frac{F_2}{F_1} \overset{?}{=} \frac{x_2}{x_1} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{15}{10} = 1.5$$

$$1.5x_1 = x_2 \Rightarrow 1.5F_1 = F_2$$

2- شرط التحصيل الشامل:

$$f(F) = f(F_1 + F_2) \overset{?}{=} f(F_1) + f(F_2)$$

$$f(F_1 + F_2) = f(2+3) = f(5) \Rightarrow f(5) = 25$$

$$f(F_1) + f(F_2) = x_1 + x_2 = 10 + 15 = 25$$

أمثلة توضيحية

أمثلة على المنظومات غير الخطية

$$y(t) = \int_0^2 u^2(t)\,dt$$

$$y(t) = 2t\,|u(t)|$$

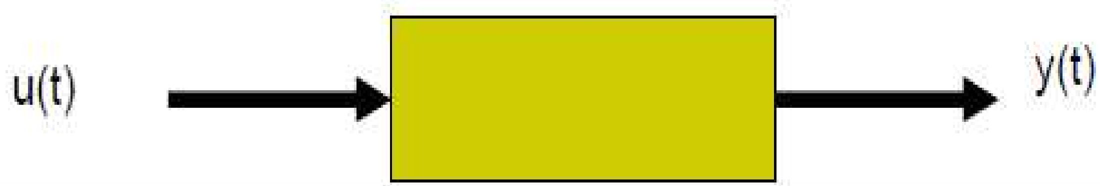
$$\frac{dy(t)}{dt} + u(t)\,y(t) = u(t)$$

أمثلة على المنظومات الخطية

$$y(t) = \int_0^2 u(t)\,dt$$

$$y(t) = 2t\,u(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3t^2 y(t) = u(t)$$



التحقق من خطية منظومة

مثال منظومة توصف بالمعادلة:

$$y(t) = \int_0^2 u(t)\, dt$$

$$y_1(t) = \int_0^2 u_1(t)\, dt, \qquad y_2(t) = \int_0^2 u_2(t)\, dt$$

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$$

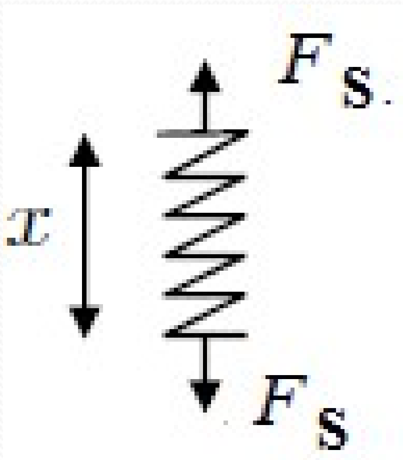
$$y(t) = \int_0^2 u(t)\, dt = \int_0^2 [u_1(t) + u_2(t)\,]dt$$

$$= \int_0^2 u_1(t)dt + \int_0^2 u_2(t)\, dt = y_1(t) + y_2(t)$$

$$u(t) = k\, u_1(t) \Rightarrow y(t) = \int_0^2 k\, u_1(t)dt = k\int_0^2 u_1(t)dt$$

كلا الشرطين محققان

مثال



يطلب اختبار خطية النابض الموصوف بالمعادلة:

$$F_s = k_1 x + k_2 x^3$$

حيث k_1 و k_2 ثابتان وباقي الرموز مبينة في الشكل جانبا

نختبر تحقق مبدأ التجانس

$$F_S(kx) = k_1(kx) + k_2(kx)^3 + \ k_1.k.x + k_2.k^3.x^3$$

$$k.F_S(x) = k(k_1 x + k_2 x^3) = k.k_1.x + k.k_2.x^3$$

الشرط الأول غير محقق (وهذا يكفي للقول بلاخطية النابض)

مثال

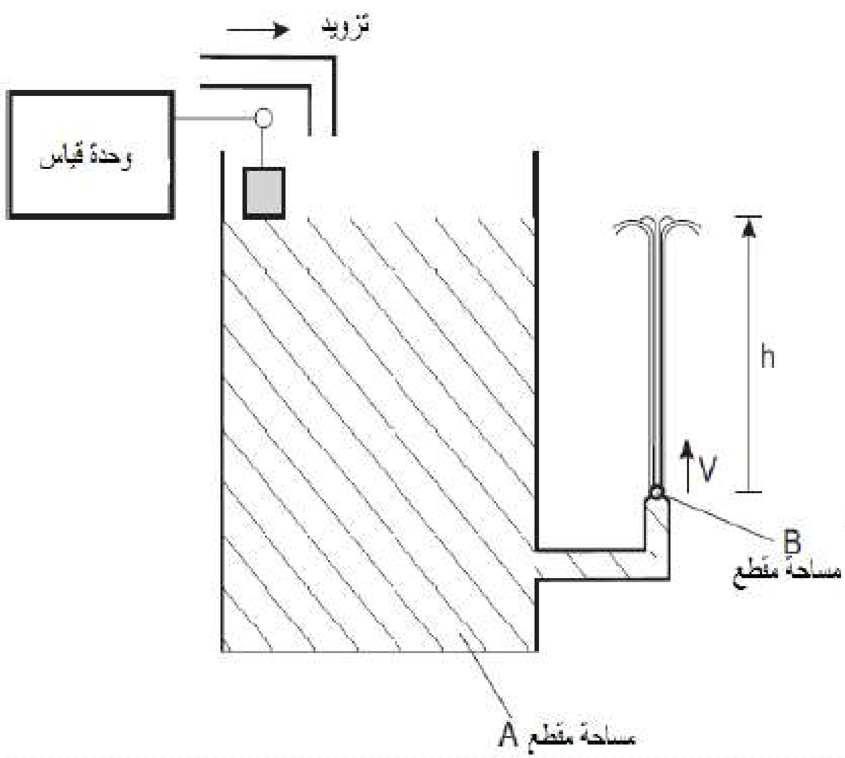
نختبر تحقق مبدأ التحصيل الشامل

$$F_S(x_1 + x_2) = k_1(x_1 + x_2) + k_2(x_1 + x_2)^3$$

$$F_S(x_1) + F_S(x_2) = k_1x_1 + k_1x_1^3 + k_2x_2 + k_2x_2^3$$

إذاً هذا النابض غير خطي

النموذج الرياضي لمنظومة خزان ماء مع تصريف



1. صياغة المسالة: وضع نموذج رياضي مبسط للمنظومة
2. الهدف من النموذج: تحليل عام للطبيعة الستاتيكية و الديناميكية للمنظومة.
3. فرضيات التبسيط: السائل متجانس. اللزوجة والانضغاطية مهملة. المقاومة في فتحة التصريف مهملة.
4. التفكيك: يمكن مقاربة هذه المسالة بطرق مختلفة وفقا للمعلومات المتوفرة. في حالة معرفة مساحة مقطع الخزان A ومساحة مقطع فتحة التصريف B يمكن اعتبار كل من مستوى السائل في الخزان (يمكن قياسه بواسطة الفواشة) غزارة التدفق من فتحة التصريف كافيين لتوصيف التغيرات التي تطرأ على المنظومة.

النموذج الرياضي لمنظومة خزان ماء مع تصريف

بالنسبة لغزارة التصريف وباعتبار مقاومة الجريان في الفتحة معدومة (لا يوجد فعل خنق للجريان)

فإن ارتفاع نافورة التصريف سيكون مساويا لمستوى السائل في الخزان. ويمكن هنا أن نعتمد على معادلات حركة السائل (قذف شاقولي) أي:

$$v = g \cdot t$$

$$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

من هاتين العلاقتين يمكن أن نكتب:

$$h = \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v}{g} \right)^2$$

ومنه العلاقة المعبرة عن السرعة:

$$v = \sqrt{2gh}$$

وهي عبارة تمكننا من الربط بين التدفق في خط التصريف q_{dr} [m^3/s] وارتفاع مستوى السائل h من خلال العلاقة :

$$q_{dr} = B \cdot v$$

النموذج الرياضي لمنظومة خزان ماء مع تصريف

نحدد الدخل والخرج:

✓نعتبر غزارة التدفق إلى الخزان q_s إشارة دخل

✓ارتفاع السائل في الخزان h إشارة خرج

تغير مستوى السائل في الخزان

$$A\frac{dh}{dt}=q_s-q_{dr}$$

هذه العلاقة يمكن اعتبارها بمثابة النموذج الأولي ويفضل كتابتها لعزل الدخل والخرج

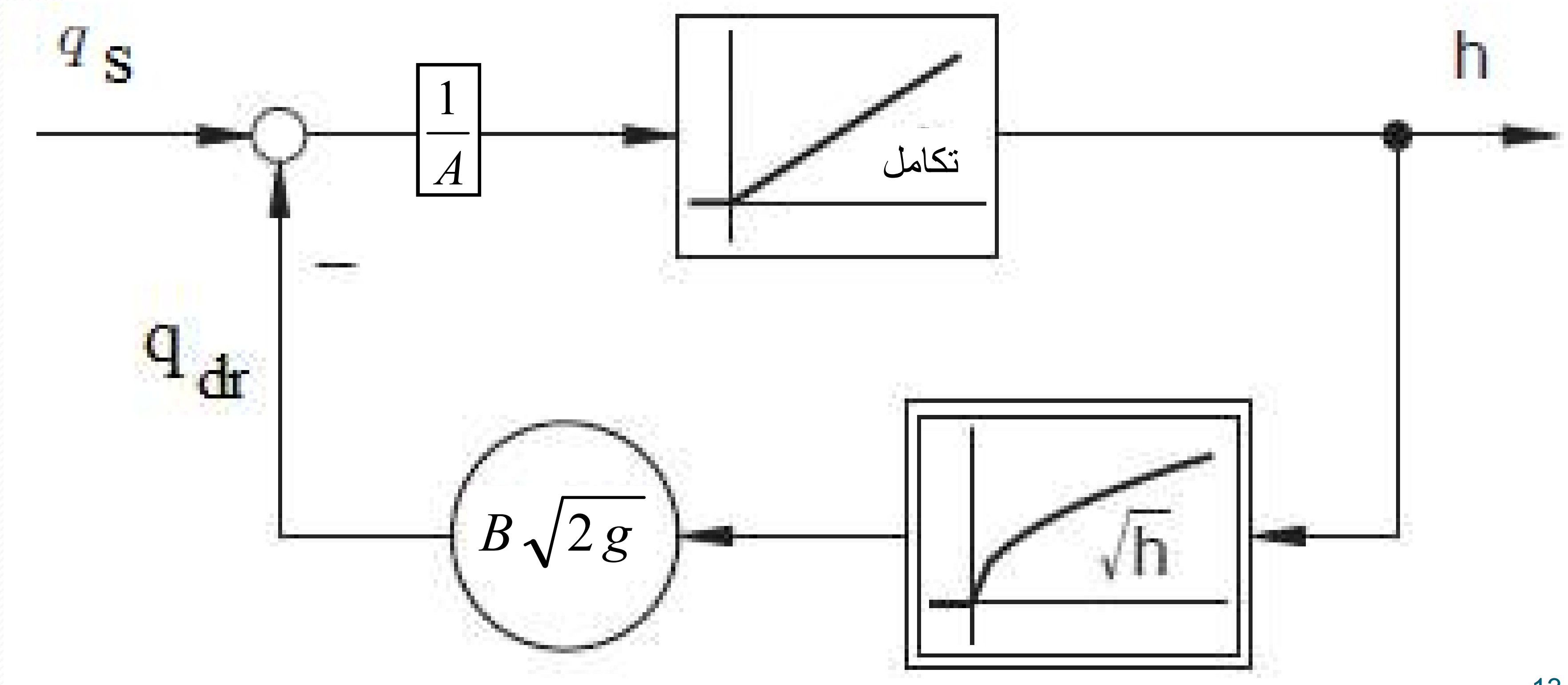
بالشكل:

$$A\frac{dh}{dt}+B\cdot\sqrt{2gh}=q_s$$

النموذج الرياضي لمنظومة خزان ماء مع تصريف

من أجل التأكد من مصداقية النموذج يمكن محاكمة أو تقييم النموذج بطرق مختلفة قد يكون أبسطها التعبير عنه بمخطط صندوقي والتأكد من أنه يعمل بشكل واف للغرض:

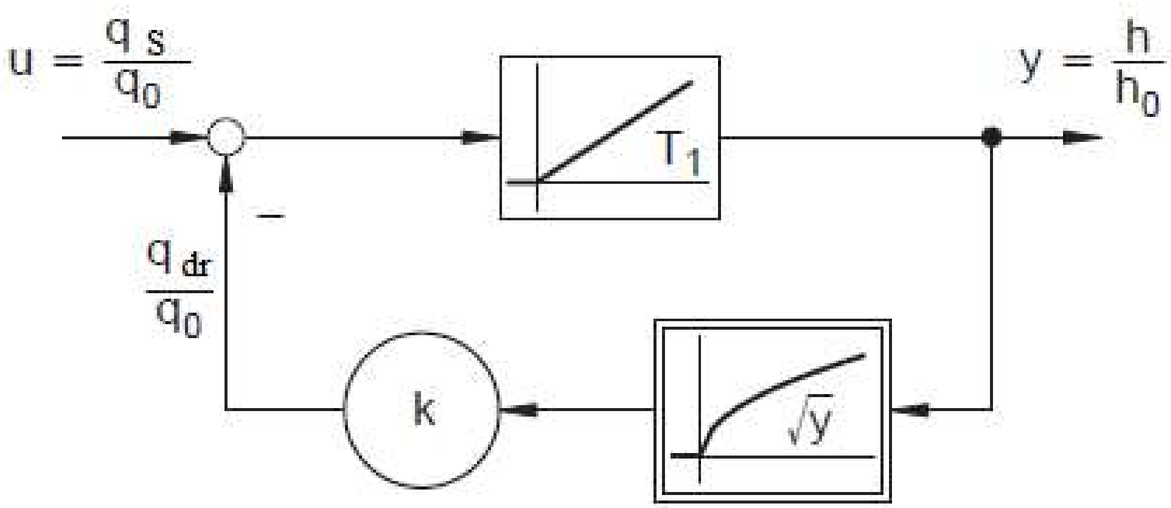
$$A\frac{dh}{dt}=q_s-q_{dr}\Rightarrow dh=\frac{1}{A}\left(q_s-q_{dr}\right)dt\Rightarrow h(t)=\int_0^t\frac{1}{A}\left(q_s-q_{dr}\right)dt$$



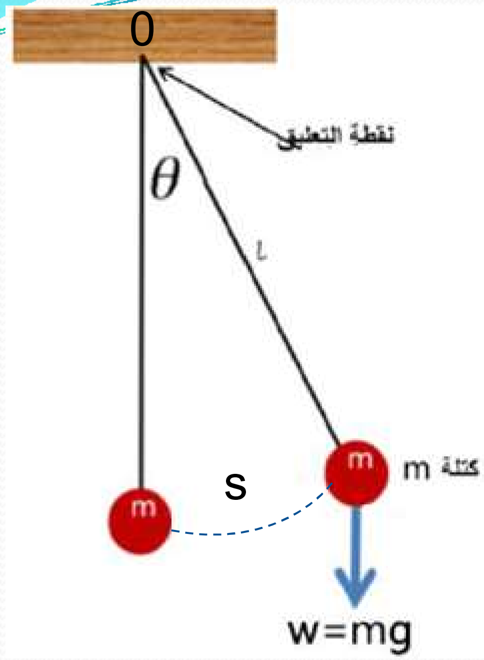
النموذج الرياضي لمنظومة خزان ماء مع تصريف

هذه المسألة تبدو بسيطة في حالة المنظومات غير المعقدة ولكنها ذات أهمية كبيرة في حالة المنظومات الأكثر تعقيدا. ويكون هنا من المفيد إجراء عمليتي تقييس Normalization للبارامترات وكتابة النموذج بالشكل القياسي standardization

$$\underbrace{\frac{A\cdot h_0}{q_0}}_{T_1}\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{h}{h_0}\right)}_{y}+\underbrace{\frac{\overbrace{B\sqrt{2gh_0}}^{q_{dr0}}}{q_0}}_{K}\sqrt{\frac{h}{h_0}}=\frac{q_s}{\underbrace{q_0}_{u}} \quad\Rightarrow\quad T_1\frac{dy}{dt}+K\cdot\sqrt{y}=u$$



النموذج الرياضي لنواس بسيط



فرضيات التبسيط المعتمدة:

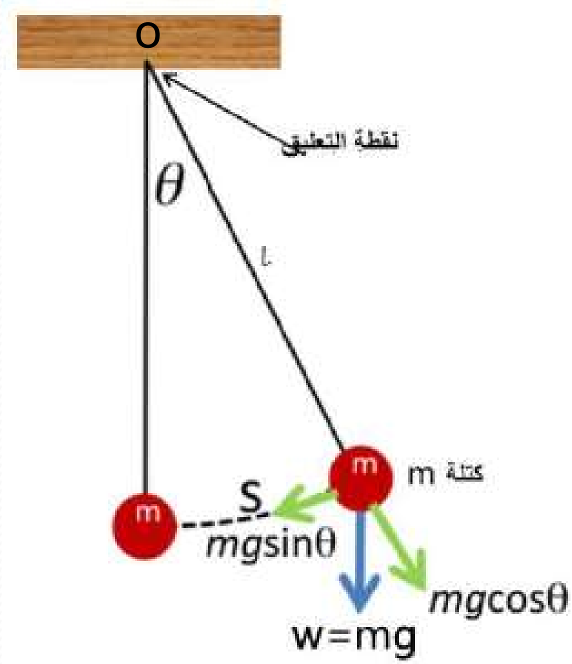
- اعتبار كتلة النواس نقطية متركزة على بعد ***l*** من نقطة التعليق (كتلة الخيط مهملة)
- مقاومة الهواء وقوى الاحتكاك في نقطة التعليق معدومة
- لا يوجد دخل

هنا تتكون هذه المنظومة البسيطة من عنصر وحيد هو الكرة التي تتأثر بقوتي ثقل الكرة وتوتر رد فعل خيط التعليق

$$\sum T_o = J\ddot{\theta}$$

$$J = m \cdot l^2$$

حيث **J** عزم العطالة الكتلي



$$-mg \cdot l \sin\theta = m \cdot l^2 \ddot{\theta}$$

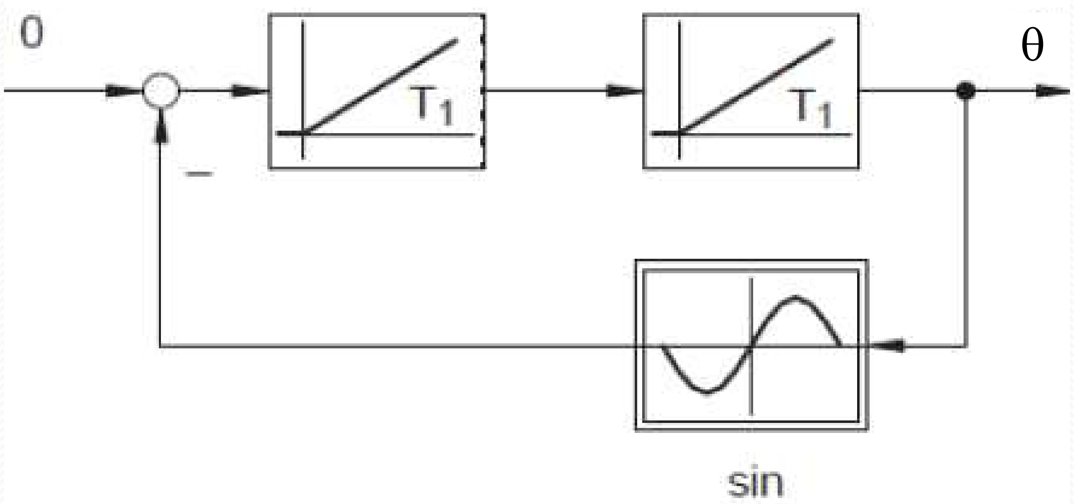
$$g \sin\theta + l\ddot{\theta} = 0$$

النموذج الرياضي لنواس بسيط

$$g\sin\theta + l\ddot{\theta} = 0$$

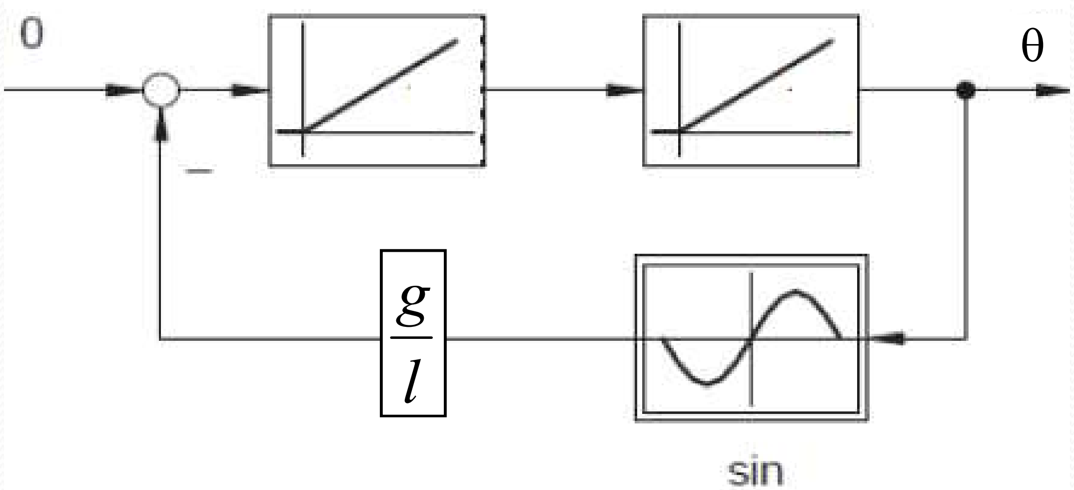
$$\frac{l}{g}\ddot{\theta} + \sin\theta = 0$$

$$T_1\ddot{\theta} + \sin\theta = 0$$



بالقسمة على أمثال المشتق
الأعلى رتبة نجد:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$



التحقق من شرط الخطية

1- شرط التجانس:

$$y = f(u) = \sin\theta$$

$$f(ku) \stackrel{?}{=} k \cdot f(u)$$

$$f(ku) = \sin(k\theta)$$

$$k \cdot f(u) = k \cdot \sin\theta$$

$$\Rightarrow \sin(k\theta) \neq k \cdot \sin\theta$$

غير محقق

$$f(u) = \sqrt{y}$$

$$f(ku) \stackrel{?}{=} k \cdot f(u)$$

$$f(ku) = \sqrt{k \cdot y}$$

$$k \cdot f(u) = k \cdot \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow \sqrt{k \cdot y} \neq k \cdot \sqrt{y}$$

2- شرط التحصيل الشامل:

$$f(u_1 + u_2) \stackrel{?}{=} f(u_1) + f(u_2)$$

$$f(u_1 + u_2) = \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$f(u_1) + f(u_2) = \sin\theta_1 + \sin\theta_2$$

$$\Rightarrow \sin(\theta_1 + \theta_2) \neq \sin\theta_1 + \sin\theta_2$$

غير محقق

$$f(u_1 + u_2) \stackrel{?}{=} f(u_1) + f(u_2)$$

$$f(u_1 + u_2) = \sqrt{y_1 + y_2}$$

$$f(u_1) + f(u_2) = \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{y_1 + y_2} \neq \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}$$

المخطط الصندوقي

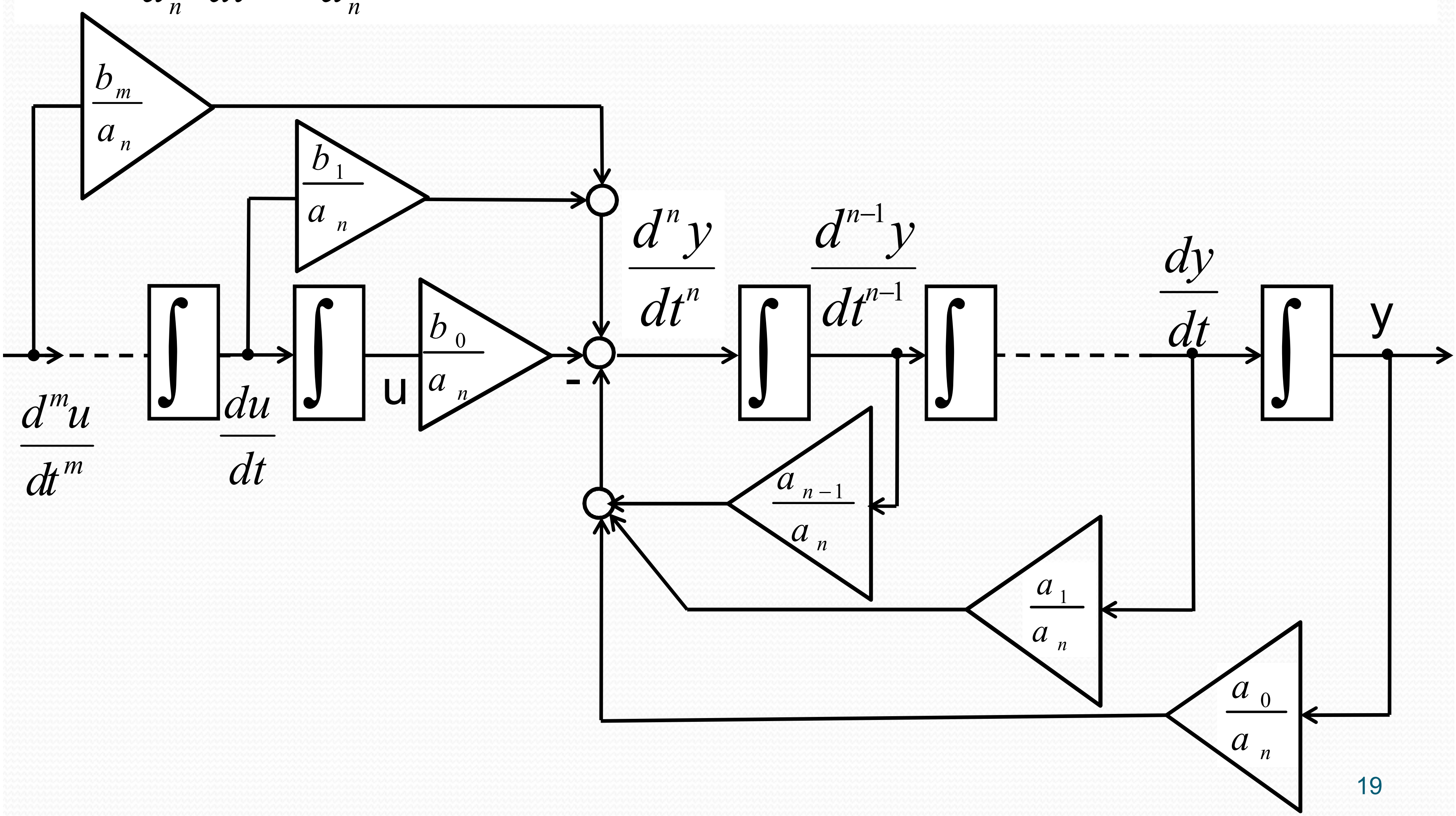
الشكل العام للمعادلة التفاضلية القياسية (إشارة الدخل u وإشارة الخرج y):

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)} y}{dt^{(n-1)}} + \ldots\ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{(m-1)} u}{dt^{(m-1)}} + \ldots\ldots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

نعزل المشتق الأعلى ونقسم على أمثاله:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -\left(\frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{d^{(n-1)} y}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{a_1}{a_n} \frac{dy}{dt} + \frac{a_0}{a_n} y\right) + \frac{b_m}{a_n} \frac{d^m u}{dt^m} + \frac{b_{m-1}}{a_n} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots\ldots + \frac{b_1}{a_n} \frac{du}{dt} + \frac{b_0}{a_n} u$$

$$\frac{d^n y}{dt^n} = -\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{d^{(n-1)}y}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{a_1}{a_n}\frac{dy}{dt} + \frac{a_0}{a_n}y\right) + \frac{b_m}{a_n}\frac{d^m u}{dt^m} + \frac{b_{m-1}}{a_n}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \ldots\ldots + \frac{b_1}{a_n}\frac{du}{dt} + \frac{b_0}{a_n}u$$



$$\frac{d^n y}{dt^n} = -\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{d^{(n-1)}y}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{a_1}{a_n}\frac{dy}{dt} + \frac{a_0}{a_n}y\right) + \frac{b_m}{a_n}\frac{d^m u}{dt^m} + \frac{b_{m-1}}{a_n}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \ldots\ldots + \frac{b_1}{a_n}\frac{du}{dt} + \frac{b_0}{a_n}u$$